МАСТЕР-КЛАСС:

«Нестандартные методы решения некоторых уравнений с модулем»

Учитель математики
Галина Юрьевна Назаренко

Нестандартные методы решения некоторых уравнений.

Практически каждый учитель знает, какие проблемы вызывают у учащихся задания, содержащие модуль. Это один из самых трудных материалов, с которыми школьники сталкиваются на экзаменах.

Выбор темы обусловлен тем, что, во-первых, задачи, связанные с абсолютными величинами, часто встречаются на математических олимпиадах и на экзаменах, во-вторых, это понятие широко применяется не только в различных разделах школьного курса математики, но и в курсе высшей математики.

Несмотря на то, что тема «Модуль числа» проходит «красной нитью» через весь курс школьной и высшей математики, для ее изучения по программе отводится очень мало времени (в 6 классе -2 часа, в 8 классе - 4 часа).

Исходя из всего вышесказанного, учителю необходимо находить разнообразные методические приемы, использовать различные подходы и методы в обучении решению задач с модулем. Разнообразие методов будет способствовать сознательному усвоению математических знаний, вовлечению учащихся в творческую деятельность, а также решению ряда методических задач, встающих перед учителем в процессе обучения, в частности, реализации внутрипредметных связей (алгебра-геометрия), расширению области использования графиков, повышению графической культуры учеников.

Указанные обстоятельства обусловили выбор темы творческой работы.

Цель работы: рассмотреть нестандартные методы решения некоторых уравнений с модулем. Вспомнить основной способ, используемый при решении уравнений, содержащих модуль.

Напомним основные понятия, используемые в данной теме.

Уравнением с одной переменной называют равенство, содержащее переменную. **Корнями уравнения** называются значения переменной, при которых уравнение обращается в верное равенство. **Решить уравнение** – значит, найти все его корни или доказать, что корней нет. **Уравнением с модулем** называют равенство, содержащее переменную под знаком модуля.

Обучение - это ремесло,
использующее бесчисленное
количество маленьких трюков.

Решение уравнений, содержащих знак модуля: методы, приемы, равносильные переходы

Уравнение вида	
правило 1: $|f|-|g|=f-g$ $\left[\begin{array}{l} f=g \\ \begin{cases} f\ge 0 \\ g\ge 0 \end{cases}\end{array}\right.$	правило 2: $|f|-|g|=g-f$ $\left[\begin{array}{l} f=g \\ \begin{cases} f\le 0 \\ g\le 0 \end{cases}\end{array}\right.$

Решим уравнение двумя способами:

<u>Первый способ:</u>

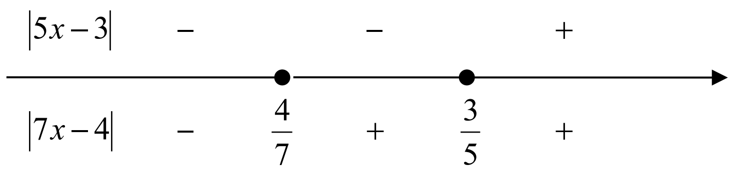
$$|5x-3|-|7x-4|=2x-1$$

АЛГОРИТМ решения уравнений с модулями:

1. Отметить все нули подмодульных выражений на числовой прямой. Они разобьют числовую прямую на промежутки, в которых все подмодульные выражения имеют постоянный знак.
2. Из каждого промежутка взять произвольное число и подсчетом определить знак подмодульного выражения, по знаку раскрыть модули.
3. Решить уравнения и выбрать решения, принадлежащие данному промежутку.

Вычислим нули подмодульных выражений:

$5x-3=0$; $x=\dfrac{3}{5}$; $7x-4=0$; $x=\dfrac{4}{7}$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\frac{4}{7}\\ -5x+3+7x-4=2x-1\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{4}{7}\le x<\frac{3}{5}\\ 3-5x-7x+4=2x-1\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge\frac{3}{5}\\ 5x-3-7x+4=2x-1\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\frac{4}{7}\\ 0=0\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{4}{7}\le x<\frac{3}{5}\\ x=\frac{4}{7}\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge\frac{3}{5}\\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow\end{cases}\end{array}\right. \qquad x\in\left(-\infty;\frac{4}{7}\right]$$

<u>Второй способ:</u>

Воспользуемся правилом 2:

$$|5x-3|-|7x-4|=2x-1$$

$$\left[\begin{array}{l}5x-3=7x-4\\ \begin{cases}5x-3\le 0\\ 7x-4\le 0\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ \begin{cases}x\le\frac{3}{5}\\ x\le\frac{4}{7}\end{cases}\end{array}\right. \qquad x\le\frac{4}{7}$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{4}{7}\right]$

Кажется, что преимуществ нет. Да, это так. Пока f и g линейны, преимущества не видны. Но они становятся полезными, когда функции более сложные, чем линейными.

Пример 2: воспользуемся правилом 2

$$|x^2-2x-63|-|x^2+13x+12|=15x+75$$

$$\left[\begin{array}{l}x^2+13x+12=x^2-2x-63\\ \begin{cases}x^2-2x-63\le 0\\ x^2+13x+12\le 0\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=-5\\ \begin{cases}x\in[-7;9]\\ x\in[-12;-1]\end{cases}\end{array}\right. \qquad x\in[-7;-1]$$

Пример 3: воспользуемся правилом 1

$$|5x-2|=|7x-3|-2x+1$$

$$\left[\begin{array}{l} 7x-3=5x-2 \\ \begin{cases} 5x-2\ge 0 \\ 7x-3\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} x\ge \dfrac{2}{5} \\ x\ge \dfrac{3}{7} \end{cases} \end{array}\right. \qquad x\ge \frac{3}{7}$$

ответ $\left[\dfrac{3}{7};\infty\right)$

Решите самостоятельно:

1) $|x^2-5x+4|-|x^2-8x+15|=-3x+11$

2) $|x^3-3x^2-x+4|-|x^2-4x-5|=-x^3+4x^2-3x-8$

3) $|x^3-18x|-|5x^2-5x-10|=-2x^3+5x^2+13x-10$

4) $|3x^2-4x-4|-|x^2+7x+6|=2x^2-11x-10$

Уравнение вида:

правило 3:	правило 4:
$\lvert f\rvert+\lvert g\rvert=f+g$ $\begin{cases} f\ge 0 \\ g\ge 0 \end{cases}$	$\lvert f\rvert+\lvert g\rvert=-f-g$ $\begin{cases} f\le 0 \\ g\le 0 \end{cases}$

Решим уравнение:

$$|1+\cos(\pi\sqrt{x})|+|x^2-15x+44|=15x-x^2-\cos(\pi\sqrt{x})-45$$

воспользуемся правилом 4:

$$\begin{cases} 1+\cos(\pi\sqrt{x})\le 0 \Rightarrow \cos(\pi\sqrt{x})=-1 \\ x^2-15x+44\le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=(1+2k)^2, k\in Z \\ x\in[4;11] \end{cases} \qquad x=9$$

$4\le x\le 11;$

$4\le (1+2k)^2\le 11$

$2\le 1+2k\le \sqrt{11}$

$1\le 2k\le \sqrt{11}-1$ $\qquad x=(1+2\cdot 1)^2=9$

$\dfrac{1}{2}\le k\le \dfrac{\sqrt{11}-1}{2}$

$k=1$

Ответ: x=9

Решим уравнение:

$$\left|x^3-64\right|+\left|x^2+8x-33\right|=x^3+x^2+8x-97$$

$$\begin{cases} x^3-64\geq 0 \\ x^2+8x-33\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 4 \\ x\in(-\infty;-11]\cup[3;\infty) \end{cases} \quad x\in[4;\infty)$$

Решите самостоятельно:

1) $\left|-1+\cos(\pi\sqrt{x})\right|+\left|x^2-16x+55\right|=16x-x^2+\cos(\pi\sqrt{x})-56$

2) $\left|x^2+10x+21\right|+\left|x^2-6x+5\right|=2x^2+4x+26$