Государственное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования (повышения квалификации)
специалистов Московской области
ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ ПОСЛЕДИПЛОМНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра математических дисциплин

Методика решения задач с параметрами

ПРОЕКТ

«Разработка заданий и методических рекомендаций для решения задач с параметрами при подготовке к ЕГЭ по математике»

Учитель математики
МОУ Серковская СОШ
Щёлковского района
Морсковской области
Галина Юрьевна Назаренко

2011 год

Введение

Пояснительная записка

Переход старшей школы на профильное обучение определена Правительством России в «Концепции модернизации российского образования на период до 2010 г.», где ставится задача создания специализированной подготовки (профильного обучения) в старших классах общеобразовательной школы, ориентированной на индивидуализацию обучения и социализацию обучающихся.

В связи с этим целесообразно в школах ввести элективный курс «Решение уравнений и неравенств с параметрами» в 10 классе, которые хотят научиться способам решения задач повышенного уровня сложности по алгебре и началам анализа.

В процессе изучения данного элективного курса старшеклассник познакомится с различными методами решения задач с параметрами. Данный курс предусматривает не только овладение различными умениями, навыками, приемами для решения задач, но и создает условия для формирования мировоззрения ученика, логической и эвристической составляющих мышления. Задачи с параметрами, как правило, относятся к наиболее трудным задачам, носят исследовательский характер. В школьных учебниках по математике таких задач недостаточно, что говорит о целесообразности введения курса. Практика итоговых экзаменов в школе и приемных экзаменов в высшие учебные заведения показывает, что задачи с параметрами представляют для учащихся наибольшую сложность, как в логическом, так и в техническом плане, и поэтому умение их решать во многом предопределяет успешную сдачу экзамена в любое высшее учебное заведение. Старшеклассники, изучившие данный материал, смогут реализовать полученные знания и умения на итоговой аттестации в форме ЕГЭ. Освоив методы и приемы решения задач с параметрами, школьники успешно справятся с олимпиадными задачами проводимыми в ВУЗах. Именно поэтому я считаю выбранную мной тему элективного курса одной из наиболее *актуальных* и значимых на сегодняшний день, т.к. задачи с параметрами – традиционно одна из самых трудных тем конкурсной элементарной математики.

В связи с этим я решила разработать элективный курс по математике **«Решение уравнений и неравенств с параметрами»** рассчитан на **17 часов** с недельной нагрузкой в один час, занятия проводятся одно полугодие.

Мотивами для выбора данного курса у учеников могут быть следующие:

1) подготовка к выпускным и вступительным экзаменам;
2) поддержка изучения базового курса математики;
3) любопытство;
4) заинтересованность математикой;
5) профессиональная ориентация.

Курс ориентирован на категорию учащихся, обладающих достаточной математической подготовкой, проявляющих интерес к изучаемому предмету, имеющих дальнейшей целью поступление в ВУЗ. Программа также может быть использована при подготовке к олимпиадам, математическим конкурсам, к ЕГЭ.

Цель курса

1) Формировать у учащихся умения и навыки по решению задач с параметрами, сводящихся к исследованию линейных и квадратных уравнений, неравенств для подготовки к ЕГЭ и к обучению в вузе.
2) Изучение курса предполагает формирование у учащегося интереса к предмету, развитие их математических способностей, подготовку к ЕГЭ, централизованному тестированию и к вступительным экзаменам в вузы
3) Развивать исследовательскую и познавательную деятельность учащегося.
4) Обеспечить условия для самостоятельной творческой работы.

Задачи курса:

1) сформировать у учащихся представление о задачах с параметрами как задачах исследовательского характера, показать их многообразие;

2) научить применять аналитический метод в решении задач с параметрами;

3) научить приемам выполнения изображений на плоскости и их использованию в решении задач с параметрами;

4) научить осуществлять выбор рационального метода решения задач и обосновывать сделанный выбор;

5) способствовать подготовке к поступлению в вуз и продолжению образования;

6) обеспечить подготовку к осознанному и ответственному выбору сферы будущей профессиональной деятельности, требующей высокой математической культуры.

Оборудование:

1. Интерактивная доска
2. Программы: «Живая математика» на CD- носителе, 1с математический конструктор 3.0, Interwrite content Алгебра 7-11 кл на CD-носителе
3. Инструменты (циркуль, линейка)
4. Раздаточный дидактический материал.

Формы проведения занятий:

1) объяснение,
2) лекция,
3) беседа,
4) устные и письменные упражнения,
5) выполнение тренировочных заданий,
6) выполнение творческих заданий.

Моя, функция как учителя, заключается в организации совместной деятельности с учащимися, направленной на достижение общей образовательной цели. Моя позиция при проведении данного элективного курса меняется в зависимости от этапов освоения программы. Я выступаю информатором только в тех случаях, когда являюсь единственным обладателем информации. Большую часть учебного времени я выполняю функции эксперта и консультанта, поддерживающего интеллектуальную активность учащихся, и координатора при выполнении учебного проекта. Позиция равноправного участника – самая предпочтительная при проведении групповых обсуждений и индивидуальной работы. Важный принцип преподавания – создание на уроках атмосферы доверия и свободного обмена мнениями.

При проведении занятий, использую разнообразные методы и формы обучения, которые зависят от особенностей тематики. Для передачи теоретического материала наиболее эффективна школьная лекция, сопровождающаяся беседой с учащимися. Для закрепления материала провожу семинары по обсуждению теории, практикумы по решению математических задач. При сохранении традиционных форм обучения применяю тестирования, дискуссии, направленных на аргументацию вариантов своих решений и различных форм индивидуальной или групповой деятельности учащихся.

Доминантной формой учебного процесса должна стать *исследовательская деятельность* учащихся, используемая не только на занятиях в классе, но и в ходе самостоятельной работы, которая организуется через:

1) работу с дидактическим материалом и тестами;
2) решение предложенных задач с последующей проверкой и разбором вариантов решения;
3) подготовку сообщений, защиту рефератов и творческих работ, являющуюся одной из форм демонстрации достижений учащихся в усвоении изученного материала.

Содержание программы элективного курса включает три части — теоретическую, практическую и проектную.

В *теоретическом* разделе курса рассматриваются уравнения и неравенства с параметрами и способы их решения. Учащиеся получают сведения о классификации задач в математике и рациональных путях поиска их решения.

Практическая часть программы включает задачи различного уровня сложности для закрепления и контроля усвоенного материала. Эти задачи предназначены для индивидуальной, парной, групповой и коллективной форм работы. Большое внимание в курсе уделяется формированию у учащихся умения конструировать задания.

При выполнении *проектных* заданий учащиеся должны показать свои умения в составлении и представлении (защита с помощью презентации) сообщений, рефератов, самостоятельно составленных заданий.

В результате изучения курса учащийся должен:

1) усвоить основные приемы и методы решения уравнений, неравенств систем уравнений с параметрами;

2) применять алгоритм решения уравнений, неравенств, содержащих параметр,

3) проводить полное обоснование при решении задач с параметрами;

4) овладеть исследовательской деятельностью.

Структура курса планирования учебного материала

п/п	тема	Количество часов			примечание
		общее	теория	практика	
1.	Первоначальные сведения	2	1	1	
2.	Решения линейных уравнений, содержащих параметры	1,5	0,5	1	
3.	Решения линейных неравенств, содержащих параметры	1,5	0,5	1	
4.	Квадратные уравнения содержащие параметры	2	0,5	1,5	

5.	Квадратные неравенства, содержащие параметры	3	0,5	2,5	
6.	Уравнения и неравенства с параметрами с некоторыми условиями	2	0,5	1,5	
7.	Защита проектных заданий	2		2	
8.	Итого	14	3,5	10,5	

Краткое содержание курса

I. Первоначальные сведения.

Определение параметра. Виды уравнений и неравенств, содержащие параметр. Основные приемы решения задач с параметрам. Решение простейших уравнений с параметрами вида

Цель: Дать первоначальное представление учащемуся о параметре и помочь привыкнуть к параметру. К необычной форме ответов при решении уравнений.

Что такое параметр?

Если вы вспомните некоторые основные уравнения (например, $\boldsymbol{k}\mathbf{x+l=0}$, $\boldsymbol{a}\mathbf{x^2+bx+c=0}$), то обратите внимание, что при поиске их корней значения остальных переменных, входящих в уравнения, считаются фиксированными и заданными. Все разночтения в существующей литературе связаны с толкованием того, какими фиксированными и заданными могут быть эти значения остальных переменных.

Поскольку в школьных учебниках нет определения параметра, мы предлагаем взять за основу следующий его простейший вариант.

Определение. Параметром называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Комментарий. Независимость параметра заключается в его «неподчинении» свойствам, вытекающим из условия задачи. Например, из неотрицательности левой части уравнения $|x|=a-1$ не следует неотрицательность значений выражения $a-1$, и если $a-1<0$, то мы обязаны констатировать, что уравнение не имеет решений.

Что означает «решить задачу с параметром»?

Естественно, это зависит от вопроса в задаче. Если, например, требуется решить уравнение, неравенство, их систему или совокупность, то это означает предъявить обоснованный ответ либо для любого значения параметра, либо для значения параметра, принадлежащего заранее оговоренному множеству.

Если же требуется найти значения параметра, при которых множество решений уравнения, неравенства и т. д. удовлетворяет объявленному условию, то, очевидно, решение задачи и состоит в поиске указанных значений параметра.

Более прозрачное понимание того, что означает решить задачу с параметром, у читателя сформируется после ознакомления с примерами решения задач на последующих страницах.

Каковы основные способы (методы) решения задач с параметром?

Способ I (аналитический). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра.

Комментарий. Аналитический способ решения задач с параметром есть самый трудный способ, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Способ II (графический). В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости (x; y), или в координатной плоскости (x; a).

Комментарий. Исключительная наглядность и красота графического способа решения задач с параметром настолько увлекает изучающих тему «Задачи с параметром»

Способ III (решение относительно параметра). При решении этим способом переменные х и а принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных х и а и заканчиваем решение.

II. Решение линейных уравнений (и уравнений приводимых к линейным), содержащих параметр.

Общие подходы к решению линейных уравнений. Решение линейных уравнений, содержащих параметр. Решение уравнений, приводимых к линейным. Решение линейно - кусочных уравнений. Применение алгоритма решения линейных уравнений, содержащих параметр. Геометрическая интерпретация. Решение системных уравнений.

Цель: Поиск решения линейных уравнений в общем, виде; исследование количества корней в зависимости от значений параметра.

Линейные уравнения, неравенства и системы.

Линейные уравнения.

Уравнение вида $ax = в$, где $a, в \in R$, называется линейным относительно неизвестного х.

Возможны три случая:

1) $a \neq 0$, $в$ - любое действительное число. Уравнение имеет единственное решение $x = \frac{в}{a}$.

2) $a = 0,\ в = 0$. Уравнение принимает вид: $0 \cdot x = 0$, решениями являются все $x \in R$.

3) $a = 0,\ в \neq 0$. Уравнение $0 \cdot x = b$ решений не имеет.

Примеры:

1. Решить уравнения: *ах=4;*

   ах-а=4-х;

   4+кх=5х+1.

2. При каком значении **а** уравнение *ах=х* обращается в тождество?

3. При каких **<u>а</u>** уравнение *6(ах - 1) + а = 3(а-х) + 7* имеет бесконечно много решений?

4. При каких **<u>а</u>** уравнение *2(3х-2а) = 2 + ах* не имеет решений?

5. Решить уравнение:

$$m^2x = m(x+2) - 2;$$

$$x - \frac{2}{m^2}(4x+1);$$

$$\frac{x-3}{x+2} + \frac{4}{a-1} = \frac{2}{(a-1)(x+2)}.$$

III. Решение линейных неравенств, содержащих параметр.

Определение линейного неравенства. Алгоритм решения неравенств. Решение стандартных линейных неравенств, простейших неравенств с параметрами. Исследование полученного ответа. Обработка результатов, полученных при решении.

Цель: Выработать навыки решения стандартных неравенств и приводимых к ним, углубленное изучение методов решения линейных неравенств.

Линейные неравенства.

Неравенства вида *ах* v *в,* где знак v – любой из знаков <,>,≤,≥,≠ называются **линейными**и **неравенствами.** Множество решений неравенств *ах>в, ах≥в* - промежуток $\left(\frac{в}{a}; \infty\right)$, если а>0, и $\left(-\infty; \frac{в}{a}\right)$, если а<0. Аналогично для неравенств *ах<в ,ах≤в* множество решений - промежуток $\left(-\infty; \frac{в}{a}\right)$, если *а>0*, и

$\left(\frac{в}{a};\infty\right)$, если $a<0$. При $a=0, в=0$ решением неравенств $ax<b$, $ax>b$ является $\varnothing$, а решением неравенств вида $ax\le в$, $ax\ge в$ является R. При $a=0, в>0$ решением неравенств $ax\ge b$, $ax>b$ является $\varnothing$, а решением неравенств вида $ax\le в$, $ax<в$ является R. При $a=0, в<0$ решением неравенств $ax<b$, $ax\le b$ является $\varnothing$, а решением неравенств вида $ax>в$, $ax\ge в$ является R.

Примеры:

1. Решить неравенство: $a(3x-1)>3x-2$.
2. Решить неравенство: $(a^2-2a-3)x-a<0$.
3. Решить неравенство: $\frac{mx+1}{3}+\frac{4m-x}{2}<\frac{m^2}{6}$.
4. При каких **a** неравенство $\frac{x-2a-1}{x-a}<0$ выполняется для всех $x\in[1;2]$?
5. Решить неравенство: $\frac{3x-a}{(a+3)(x-2)}+\frac{a}{a+3}<\frac{-3}{x-2}$.

IV. Квадратные уравнения, содержащие параметр.

Актуализация знаний о квадратном уравнении. Исследования количества корней, в зависимости от дискриминанта. Использование теоремы Виета. Исследование трехчлена. Алгоритм решения уравнений. Аналитический способ решения уравнений. Графический способ решения уравнений. Классификация задач, с позиций применения к ним методов исследования.

Цель: Формировать умение и навыки решения квадратных уравнений с параметрами.

Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2+вx+c=0$, где a, $в$, c - действительные числа, $a\neq 0$ называется *квадратным уравнением.* $D=в^2-4ac$

D<0, то уравнение не имеет действительных корней;

D>0, то уравнение имеет два действительных корня

D=0, то уравнение имеет один корень.

$$x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{D}}{2a}$$

A. *Задание на нахождение корней квадратного уравнения.*

Решить уравнение:

$$\frac{x^2-(a+1)x-(a+2)}{(x+2)(x-3a)}=0.$$

B. *Задание на исследование количества корней в зависимости от значений параметров.*

1. Найдите наименьшее целое *а*, при котором уравнение $x^2 + (2a +3)x + a^2 - a + 5 = 0$ имеет два различных корня.

2. При каких *а* уравнение $(a^2 - 6a +5)\ x^2 - (a^2 - 3a +2\ )\ x + a^2 - a = 0$ имеет более двух корней?

C. *Задание на установление равносильности уравнений.*

Найти все пары *(а; в)*, для которых уравнения $x^2 -ax + a = 0$ *и* $x^2 +вx - 2в = 0$ равносильны.

D. *Задания на соотношения между корнями квадратных уравнений (применение теоремы Виета)*

1. При каких *а* сумма квадратов двух различных корней уравнения $ax^2 +6x - 6 = 0$ больше 3?

2. При каких *а* разность корней уравнения $2x^2 - (\ a+1)x + (a -1) = 0$ равна их произведению?

3. При каком *а* один из корней уравнения $x^2 - 5x - 3a = 0$ будет втрое больше одного из корней уравнения $x^2 - 6x +4a = 0$?

E. *Задания на взаимное расположение корней уравнения.*

1. При каких *а* уравнение $x^3 - (2a +1)x +3x - 4 =0$ имеет два корня, один из которых меньше 2, а другой больше 2 ?

2. При каких *а* корни уравнения $ax^2 - (2a +1)x +3a - 1 =0$ больше 1?

3. При каких *а* корни квадратного трехчлена $(2a - 2)x^2 +(a +1)x +1$ больше -1, но меньше 0?

4. При каких *а* один из корней уравнения $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 2 = 0$ находится между числами 1 и 3, а второй - между числами 4 и 6?

F. *Уравнения приводимые к квадратным.*

1. При каком наименьшем целом значении параметра *а* уравнение $(x^2 - 2x)^2 - (a + 2)(x^2 - 2x) + 3a - 3 = 0$ имеет четыре различных корня?

2. При каких а все решения уравнения

$$x^4 + (x+1)((3a-2)x^2 + (2a^2 - a - 3)(x+1)) = 0$$

принадлежат отрезку от -3 до 0 ?

V. Квадратные неравенства, содержащие параметр

Актуализация знаний о квадратном неравенстве. Исследования количества корней, в зависимости от дискриминанта. Использование теоремы Виета. Исследование трехчлена. Алгоритм решения неравенств. Аналитический способ решения неравенств. Графический способ решения неравенств. Классификация задач, с позиций применения к ним методов исследования.

Цель: Формировать умение и навыки решения квадратных неравенств с параметрами.

Квадратные неравенства.

Неравенства вида $ax^2 + вx + c < 0$, $ax^2 + вx + c > 0$, $ax^2 + вx + c \geq 0$, $ax^2 + вx + c \leq 0$, где *а, в, с* - действительные числа, $a \neq 0$ называются **квадратными**.

Если квадратный трехчлен имеет корни $(x_1 < x_2)$, то при $a>0$ он положителен на множестве $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ и отрицателен на интервале $(x_1; x_2)$.

При $a<0$, трехчлен отрицателен на множестве $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ и положителен на интервале $(x_1; x_2)$.

1. Решить неравенство: $x^2 - 2(a+1)x + 4a < 0$.

2. Решить неравенство: $\frac{1}{x} + \frac{3}{2a} \leq \frac{1}{x+3a}$.

3. При каких a неравенство $(a - 1)x^2 +(2a + 2)x + 2a - 1 \leq 0$ выполняется только для одного значения x?

4. При каких a любое решение неравенства $x^2 - 4ax +x +3a^2 - 5a - 2 \geq 0$ является решением неравенства $x^2 - 2ax + a^2 - 1 >0$?

5. При каких a множеством решений неравенства $x^2 - 2ax - 3 \leq 0$ будет отрезок длины 4?

VI. Нестандартные задачи. (Уравнения и неравенства с параметрами с некоторыми условиями)

Актуализация знаний о квадратных уравнениях и неравенствах с использованием некоторых свойств.

Цель: Формировать умения и навыки решения при некоторых условиях.

Функционально-графический метод решения задач с параметрами.

Каждое уравнение можно рассматривать как функцию одной или нескольких переменных и решать, используя свойства функций.

Примеры.

1. Найти множество значений функции $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3}$.

2. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{4 - x^2} = x + a$

3. Решить уравнение $\sqrt{x} = x - a$

4. При каких а уравнение $\sqrt{x-1} = x - a$ имеет два решения.

5. При каких $a>0$ область значений функции $y = \frac{a^{x-1} + 5}{a^x + 3a}$

не содержит ни одного целого четного числа?

6. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 5^x + \frac{25}{5^x}$.

При каком a функция $y = f(x +a)$ является четной?

7. При каких а график функции $f(x) = x^4 + 2ax^3 - 2x^2 - 6ax$ имеет вертикальную ось симметрии?

8. При каком а наименьшее значение функции $f(x)=4^x-2^{3+x}\cdot a+7a^2$ на отрезке $[-2;0]$ отрицательно?

9. При каких а функция $f(x) = ax^2 + 4x + 5$ имеет наибольшее значение и это значение больше 5,5?

10. При каких а уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{8-2x}=a$ имеет решение.

11. Найти *a*, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2=2a \\ xy=a-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Заключение

Введение элективного курса «Решение задач с параметрами» необходимо учащимся в наше время, как при подготовке к ЕГЭ, так и к вступительным экзаменам в ВУЗы. Владение приемами решения задач с параметрам можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня математического и логического мышления.

Решение задач, уравнений с параметрами, открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применяемых в исследованиях и на любом другом математическом материале. Именно такие задачи играют большую роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников. Поэтому учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, успешно справляются с другими задачами.

Литература

1.Крамор В.С. Математика. Типовые примеры на вступительных экзаменах. - М.: Аркти, 2000.

2.Математика для поступающих в вузы //Сост. А.А.Тырымов. – Волгоград: Учитель, 2000.

3. Математика. Задачи М.И.Сканави. - Минск; В.М.Скакун,1998г.

4. Математика. «Первое сентября».№ 4, 22, 23-2002 г; №12,38-2001 г

5. Нырко В.А.,Табуева В.А. Задачи с параметрами. - Екатеринбург; УГТУ,2001.

6.Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами. – М. Просвещение, 1988г

7.Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Уравнения и неравенства с параметрами. Издат МГУ, 1992г

8.Горбачев В.И. Методы решения уравнений и неравенств с параметрами, Брянск, 1999

9. Материалы по подготовке к ЕГЭ 2001-2005 г